連続体力学基礎論 : 物理的相互作用の固有法則の幾何学的考察

AUTHOR(S):

池田, 恵

連続体力学基礎論

— 物理的相互作用の固有法則の幾何学的考察 —

東理大・理工　池田　恵

（8月27日受理）

§1. 序

この論文では，変形場への新しい物理的自由度の導入による全体系の拡張を図ると共に，そこに導入された物理的自由度自身の従う固有な物理法則の変形場への反映について考察する。

従来，我々は，変形場の構造論的研究を推進させてきており，今や，前論文[1)]でのべた如く，“非局所”から“非対称”へと論理が展開されてきており，例えば，非局所連続体力学，非対称場理論，といった形で考察されてきている。そして，これら一連の考察を，「連続体力学基礎論」[*]と称して，主として，方法論的，論理的問題を扱わんとしているところである。

が，ここでは，それらについて検討するのではなく，この論文で考察していきたい問題は，結局のところ，非対称場の性格の物理的特徴を，より詳細に研究することと，導入される自由度のはる純物理的場の構造をも反映させようとすることであり，前者には，いわゆる統一場理論が参考になり，後者には，スピノル場の構造が参考になる。

以上のべた問題を，我々なりにどう把握していくかを，「連続体力学基礎論」[*]の立場からのべていきたい。

§2. 物理的相互作用場の構造

変形場の性格を把握するためには，そこに登場している多種多様の自由度と，それらの間の相互作用の性格を規定していかねばならない。その意味で，我々

＊）　この問題に関しては，本年5月から東理大で発足した「力学研究所」の機関誌，力学研究所報告（Scientific Papers of Research Institute of Pure and Applied Mechanics）に，逐次，発表の予定。

が物理的相互作用場といっているのは，変形場への物理場の作用の結果，出現する場とみなされ，着目する基本単位たる点とか領域の構造に，物理的自由度が包含されてくる。この様な事情を積極的にとりあげて，変形場の構造に反映させた取扱いが，我々の「非対称場の理論」である。そこでは，二種（以上）の性格の異なる場の間の相互作用が明示され，それが一般的にいって非対称にあることが本質的である。幾何学的には，非線型性・非ホロノーム性の反映に他ならず，方法論的には，非ホロノーム部分空間分解論が有効である。[1),2)]

物理的自由度の反映は，場が非対称になることと同時に，相互作用項が導入されることに現われ，前者は計量に，後者は接続に代表される。非対称場の計量は，純変形場のそれ $a_{\lambda\kappa}$ から“はみだし”ており，その“はみだし”$\lambda_{\kappa}^{\sigma}$ が物理的性格を支配している。形式的には

$$g_{\lambda\sigma} = \lambda_{\sigma}^{\kappa}\, a_{\lambda\kappa} \tag{2.1}$$

で導入される。一方，接続は，σ－成分からの寄与をとり入れて

$$\left.\begin{aligned} &DX^{\kappa} = dX^{\kappa} + \gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} X^{\lambda} dx^{\mu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\kappa} X^{\sigma} dx^{\mu} \\ &\text{あるいは} \\ &DX_{\kappa} = dX_{\kappa} - \gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} X_{\lambda}\, dx^{\mu} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} X_{\sigma}\, dx^{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

の如くに導入される。但し，基底場は純変形場と考える故，表面には dx^{μ} しか登場しない。dx^{σ} は純物理的線素故，後述の固有法則によって dx^{μ} と結びついてくる。かくして，物理的相互作用場の構造は，（$g_{\lambda\sigma}$, $\Gamma_{\mu\sigma}^{\kappa}$, $\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}$）によって把握されることになり，独立変数が（$x^{\kappa}$）から（$x^{\kappa}$, $\lambda_{\kappa}^{\sigma}$）へと非局所化される。$\lambda_{\kappa}^{\sigma}$ なる，いわば方向特性が各点に付随した形式に拡張されてきており，$\lambda_{\kappa}^{\sigma}$ の規定及び，逆に $\Gamma_{\mu\sigma}^{\kappa}$, $\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}$ の規定から，場の構造が把握される。

計量と接続の関係は，純変形場の量同志は，通常の非リーマン空間に於けると同様に結びついてくるが，非対称量に関しては，そうはいかない。この点が，統一場理論の複雑な原因をなしている（cf. §4.）。

§ 3. 固有法則の幾何学的把握

本質的にいえば，固有自由度の従うべき固有法則は，前節の条件とは異質のものであり，それを代表するのが，基接続の概念である。[3] つまり，独立線素 dx^{σ} の特有な条件は，dx^{μ} に関するものとは異なっていると考えられ，各線素についての固有な接続を与えるのが基接続であるから，各線素に物理的意味をもたせれば，それだけで基接続が固有法則を表わすことになる。もちろん，独自の体系全体を表わすことは別問題であるが，相互作用としての性格は，これがすべてを代表する。

今，我々が考えている物理的自由度を P^{σ} とおく，P^{σ} 及びこれの変化 dP^{σ} が如何に dx^{μ} と結びついているかを規定する函数関係が固有法則に他ならない。従って，P^{σ} に関する基接続を考えていかねばならない。今，それが，

$$\delta P^{\sigma} = dP^{\sigma} + \chi^{\sigma}_{\rho} P^{\rho} \;;\quad \chi^{\sigma}_{\rho} \equiv \chi^{\sigma}_{\mu\rho} dx^{\mu} \tag{3.1}$$

で与えられると仮定する。変形場への反映は，一般に，

$$DX^{\kappa} = dX^{\kappa} + \gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} X^{\lambda} dx^{\mu} + \Phi^{\kappa}_{\sigma\lambda} X^{\lambda} dP^{\sigma} \tag{3.2}$$

で与えられ，(x^{κ}, P^{σ}) が elements of support となること必定であり，相互作用係数 $\Phi^{\kappa}_{\sigma\lambda}$ が変形場への射影を与える。（3.1）を（3.2）に代入すれば，

$$\left.\begin{aligned} & DX^{\kappa} = dX^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} X^{\lambda} dx^{\mu} + \Phi^{\kappa}_{\sigma\lambda} X^{\lambda} \delta P^{\sigma} \\ & \text{但し，}\begin{pmatrix} \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} \equiv \gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} - \Phi^{\kappa}_{\sigma\lambda} \chi^{\sigma}_{\mu}, \\ \chi^{\sigma}_{\mu} \equiv \chi^{\sigma}_{\mu\rho} P^{\rho} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

となり，固有法則が満足されている時は，$\delta P^{\sigma} = 0$ が成立つ故，その時は，$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$ なる接続係数が相互作用のすべてを代表し，物理場からの寄与が χ^{σ}_{μ} に集約されることがわかる。この χ^{σ}_{μ} は，前節の λ^{σ}_{μ} に他ならず，かなりミクロな段階での議論になっていることがわかる。

（3.2）の形式は，Finsler 的であるが，（3.3）の接触形式は，（3.1）故のものであり，特に物理的には（3.1）が問題であり，χ^{σ}_{ρ}, $\chi^{\sigma}_{\mu\rho}$, χ^{σ}_{μ}, などの係数の物理的意味が重要である。P^{σ} の従うべき固有法則は，函数型としては

(3.1) にまとめられるから，固有自由度の取り方も重要な問題である。

固有物理的自由度の導入と，それの従うべき物理法則が，一挙に基接続の中に持ち込まれることとなり，この微分形式と物理方程式との対応関係を追求しなければならない。この点については，spinor 方程式について調べてみたい (cf. §5.)。

§4. 統一場理論に関する Comments

統一場たるものは，電力場と電磁場の統合空間を構築せんとするものであるが，物理的自由度の介入と非対称場の性格上，構造論的にもかなり困難な問題が山積みしている。我々の立場からは，非対称性が相互作用場の特徴であることに注目して，物理的自由度の導入を如何にして図るかが焦点となる。

非対称場の方程式は，Einstein の式

$$\partial_\mu g_{\lambda\sigma} = \gamma_{\mu\lambda}^{\nu}\, g_{\nu\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}\, g_{\lambda\rho} \tag{4.1}$$

で与えられる。[4),5)] 指標の位置に注意が肝要である。Einstein, Hlavaty らでは，相互作用場の概念が欠けており，従って指標のもつ意味を区別せず，専ぱら，対称・反対称分解に注意を払っている。一方，通常の共変微分商からは，

$$\nabla_\mu g_{\lambda\sigma} = \partial_\mu g_{\lambda\sigma} - \gamma_{\mu\lambda}^{\nu}\, g_{\nu\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\, g_{\lambda\rho} \tag{4.2}$$

が成立つ故，(4.1) は，

$$\nabla_\mu g_{\lambda\sigma} = -2\, S_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\rho}\, g_{\lambda\rho} \; ; \; S_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\rho} \equiv \Gamma_{[\mu\sigma]}^{\rho} \tag{4.3}$$

となる。但し，$S_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\rho}$ は相互作用の散逸性・非可逆性を代表する捩率テンソルで，(4.3) は，通常の意味の非計量性を表わしている。このことは，σ－成分が介在して非対称になって，場の構造が非ホロノームになってきていることを意味し，捩率的性格にすべての物理的特徴が集約されなければならないことがわかる。

接続係数 $\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$ は，

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \{{}^{\rho}_{\mu\sigma}\} + S_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\rho} + U^{\rho}_{\cdot\mu\sigma} \tag{4.4}$$

の形で与えられることが知られており，[5] 接続と計量の結びつきが得られ，数学的には，$S_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\rho}$ を一意的に決定する問題へと移行する。但し，$U^{\rho}_{\cdot\mu\sigma} \equiv 2h^{\rho\kappa} \times S_{(\sigma(\kappa)}^{\cdot\cdot\phi} k_{\mu)\phi}$ で与えられる一種の捩率で，$h^{\rho\kappa} \equiv g^{(\rho\kappa)}$，$k_{\mu\phi} \equiv g_{[\mu\phi]}$，$\{{}^{\rho}_{\mu\sigma}\}$ は $\mathbf{h}$ のみによる Christoffel 三指標記号である。この $\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$ の登場は，我々の相互作用場のものと類同であり，我々は非対称性を保存したままで議論せんとしている。

さて，このように統一場の非対称性を派生させる本質的要因が spin，spinor 自由度の導入であることは，一般相対性理論での統一場理論[4),6),7)] の良く知るところであり，それが相互作用場の性格をもってくることを explicit に表わせば，文献 8)，6) の形式になり，特に vierbein 形式は，既にのべたところからもわかる如く，[9] 正に我々の本質的要素と合致してい，「動標構の方法」に他ならないから，非対称場理論，就中，新しい物理的自由度の導入は，方法論的には我々のもので確立されているとみてよい。あとは，固有法則をどう反映させていくかが問題で，そこに非対称場の構造がからみあってくる。

スピノルの固有法則は Dirac 及び Schrödinger 方程式で表わされるが，これらは，明らかに微分形式であり，我々の基接続に対応させることを考えていかねばならない（後述）。一般相対性理論では，spin，spinor 自由度の導入による energy－momentum テンソルの非対称化が本質的であるが，それは，とりもなおさず，相互作用係数 $\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}$ の出現に帰着され，全体系の非対称性が構造論的に把握できる。一般相対論的には，計量と接続を同時に非対称化しなければ一般的とはいえず，そのために種々の数学的困難が存在するが，我々としては，場の方程式に着目した上で，そこに登場する量の派生する原因を相互作用として把握していくことになる。

ところで，既にのべた如く，非対称化の自由度を反映させる操作は相互作用の抽出に他ならないから，形式的に整備されれば，Finsler 場理論[10),11)] に帰着する。特に，基接続の形での固有法則が満足されている時は，従来の我々の議論は，Finsler 場理論に帰着されうる。それ故，spin，spinor 自由度を

elements of support にとることも可能である。そうすることによって，どの程度まで相互作用をとり入れられるかが我々の追求点である（cf. § 6)。

§ 5. Spinor analysis との対応関係

Spinor 自由度を添加するということは，結局，4次元時-空間，(x^k)-field（$k=0, 1, 2, 3$）に，Dirac wave equations という固有物理法則に従う wave functions $\psi=\binom{\chi^{\rho}}{\xi^{\dot{\nu}}}$（但し，この節だけは，指標の意味を今までとちがえて，ρ，ν，… は spinors の指標で 1，2 をとり，$\dot{\nu}$，$\dot{\rho}$ などは，複素共変量を意味する）を新自由度としてとり入れることに他ならない。そして，両者の相互作用ともいうべき，spinors の4次元時-空間への介入は，以下示される如く，(k)-field と (ρ)，$(\dot{\nu})$-field の間の統合空間での形式で表わされる。

Dirac wave eqs. は，自由度の性格を明確に表わすと，

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2}\,\sigma^{k\dot{\nu}}{}_{\rho}\,(\partial_k+i\,\epsilon\,\phi_k)\,\chi^{\rho} &= \mu\,\xi^{\dot{\nu}} \\ \sqrt{2}\,\sigma^{k\nu}{}_{\dot{\rho}}\,(\partial_k+i\,\epsilon\,\phi_k)\,\xi^{\dot{\rho}} &= \mu\,\chi^{\nu} \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

とかける。[8) 12)] 但し，$\psi=\binom{\chi^{\rho}}{\xi^{\dot{\nu}}}$ は波動函数，即ちスピノル，$\mu=\dfrac{mc}{\hbar}$，$\epsilon=-\dfrac{q}{\hbar c}$，$\phi_k$ は4次元ポテンシャル。そして，$\sigma^{k\dot{\nu}}{}_{\rho}$，$\sigma^{k\nu}{}_{\dot{\rho}}$ は，形式的には実空間と spinor 空間とを結びつける係数で，実質的には Dirac matrices である。

例えば，2階の Hermite スピノルと実ベクトルの関係は

$$A_{\dot{\lambda}\mu}=\sigma^{k}{}_{\dot{\lambda}\mu}\,A_k, \qquad A^{\ell}=\sigma^{\ell\dot{\lambda}\mu}\,A_{\dot{\lambda}\mu} \qquad (5.2)$$

で与えられ，計量間には

$$g_{k\ell}\,\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\,\sigma^{\ell\dot{\rho}\sigma}=\gamma^{\dot{\lambda}\dot{\rho}}\,\gamma^{\mu\sigma} \qquad (5.3)$$

なる関係が存在する。但し，$\gamma_{\mu\nu}$ は metric spinors で，$\gamma_{\dot{\mu}\dot{\nu}}$ は $\gamma_{\mu\nu}$ の複素共役成分である。spinors 自身の変換則に対応して，種々の条件が導入されるが，それらについては，ここでは，ふれないでおく。

さて，(5.2)，(5.3) の形式によって，いわゆるスピノル成分が求められ，例えば，(5.1) に対しては，

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{2}\,(\partial_{\dot{\mu}\rho} + i\,\varepsilon\,\phi_{\dot{\mu}\rho})\,\chi^{\rho} &= \mu\,\xi_{\dot{\mu}} \\ \sqrt{2}\,(\partial^{\nu\dot{\sigma}} + i\,\varepsilon\,\phi^{\nu\dot{\sigma}})\,\xi_{\dot{\sigma}} &= -\,\mu\,\chi^{\nu}\end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

などと求められるが，これらは，通常のテンソル解析に於ける非ホロノーム成分表示と類同である。

さて，次に，spinors の共変微分をみていこう。それは，

$$\left.\begin{aligned}&\psi_{\alpha\,;s} = \partial_s\psi_{\alpha} - \Gamma^{\ \rho}_{s\alpha}\,\psi_{\rho}\ ;\ \psi_{\dot{\alpha}\,;s} = \partial_s\,\psi_{\dot{\alpha}} - \Gamma^{\ \dot{\rho}}_{s\dot{\alpha}}\,\psi_{\dot{\rho}}\,, \\ &\psi^{\alpha}_{\ ;s} = \partial_s\,\psi^{\alpha} + \Gamma^{\ \alpha}_{s\rho}\,\psi^{\rho}\ ;\ \psi^{\dot{\alpha}}_{\ ;s} = \partial_s\,\psi^{\dot{\alpha}} + \Gamma^{\ \dot{\alpha}}_{s\dot{\rho}}\,\psi^{\dot{\rho}}\end{aligned}\right\} \quad (5.5)$$

で与えられる。これらは，我々の相互作用場に於ける形式と全く同じである。(5.2) が $A^{k}_{\ ;s} = \sigma^{k\dot{\lambda}\mu}\,A_{\dot{\lambda}\mu\,;s}$ なる形式になるために，$\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}_{\ \ ;s} = 0$ を仮定し，又，計量条件として $g^{k\ell}_{\ \ ;s} = 0$ を仮定すれば，(5.3) を考慮に入れて，

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_{\dot{\rho}\dot{\lambda}\,;s}\,\gamma_{\sigma\mu} + \gamma_{\dot{\rho}\dot{\lambda}}\,\gamma_{\sigma\mu\,;s} = 0 \\ &\text{あるいは} \\ &\partial_s\,\gamma - (\Gamma^{\ \alpha}_{s\alpha} + \Gamma^{\ \dot{\alpha}}_{s\dot{\alpha}})\,\gamma = 0\ ;\quad \gamma \equiv \gamma_{12}\,\gamma_{\dot{1}\dot{2}}\end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

なる条件を得る。これより，接続係数が

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^{\ \alpha}_{s\alpha} &= 2\,i\,\varepsilon\,\phi_s + \partial_s\,\ell n\,\gamma^{\frac{1}{2}} \\ \Gamma^{\ \dot{\alpha}}_{s\dot{\alpha}} &= -\,2\,i\,\varepsilon\,\phi_s + \partial_s\,\ell n\,\gamma^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

と求まる。[8) 12)]

今までのべたところからわかる如く，基本場の微分操作 $(\partial_k + i\,\varepsilon\,\phi_k)$，及び $(;s)$，等を介して，spinor 自由度 ψ_{α}，$\psi_{\dot{\alpha}}$ が相互作用として把握され，共変微分での接続係数 $\Gamma^{\ \sigma}_{s\rho}$ がそれを代表する。又，この形式では，計量

そのものは，$g^{k\ell}$，$g_{k\ell}$ と $\Gamma^{\cdot}_{\mu\lambda}$，$\Gamma^{\cdot\,\cdot}_{\mu\lambda}$ で表わされて非対称性が考えられていないが，相互作用性は $\sigma^{k\dot{\lambda}\mu}$，$\sigma^{k}_{\cdot\dot{\lambda}\mu}$ によって代表されると考えられる。今の場合は，しかし，純相互作用係数というわけのものではなくて，行列の結合を与えるのみ故，我々の非対称場での意味とは異なる。

spinor固有条件，及び spinor成分での表現は，それ自身，すべてを相互作用場の方程式に還元せんとする試みであり，形式のみならず，物理的意味を持たせなければならない。固有法則としての Dirac方程式は，場の構造方程式として把握しなければならないが，Spinor analysis では，それが前提条件として考えられているために，構造論的把握ができていない。但し，spinor analysis 全体系の構造は，上述の如く，tensor analysis と同様の形式に帰着させることができるが，相互作用場の性格が明確にされないうらみがある。

再び標題にもどると，物理固有法則としての Dirac eqs.（5.1）は，再接続から求められる方程式とみなさねばならない。今の場合，hyper film-space の如くに χ^{ρ} と $\xi^{\dot{\nu}}$ の二種類の新自由度が添加されている形になっているから，基接続の中にも χ^{ρ} と $\xi^{\dot{\nu}}$ の寄与をとり入れねばならない。通常の基接続を，それぞれに対して，

$$\left.\begin{aligned}\delta\chi^{\rho} &= P^{\rho}_{\sigma}(d\chi^{\sigma}+\Phi^{\sigma}_{\chi}\chi^{\chi}+\Psi^{\rho}_{\dot{\nu}}\xi^{\dot{\nu}})\\ \delta\xi^{\dot{\nu}} &= q^{\dot{\nu}}_{\dot{\lambda}}(d\xi^{\dot{\lambda}}+\Pi^{\dot{\lambda}}_{\dot{\kappa}}\xi^{\dot{\kappa}}+\Omega^{\dot{\lambda}}_{\rho}\chi^{\rho})\end{aligned}\right\}\qquad(5.8)$$

とかくことにする。但し，Φ，Ψ，π，Ω，は，適当な接続係数とする。これらを，微分形式に直してやると，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta\chi^{\rho}}{dx^{k}} &= P^{\rho}_{\sigma}(\partial_{k}\chi^{\sigma}+\Phi^{\sigma}_{k\chi}\chi^{\chi}+\Psi^{\sigma}_{k\dot{\nu}}\xi^{\dot{\nu}}),\\ \frac{\delta\xi^{\dot{\nu}}}{dx^{k}} &= q^{\dot{\nu}}_{\dot{\lambda}}(\partial_{k}\xi^{\dot{\lambda}}+\Pi^{\dot{\lambda}}_{k\dot{\kappa}}\xi^{\dot{\kappa}}+\Omega^{\dot{\lambda}}_{k\rho}\chi^{\rho})\end{aligned}\right\}\qquad(5.9)$$

となる。固有法則が成立している以上，（5.9）は，恒等的に0が満足されていると考えられる。そして，これらが，とりもなおさず，spinors に関する

Dirac eqs. に他ならないとみなすと，各接続係数に対して，次の如き対応がつけられる。（cf.（5.1））。

$$\left.\begin{array}{l}(P^{\rho}_{\sigma}\,\partial_k + P^{\rho}_{\tau}\,\Phi^{\tau}_{k\sigma})\,\chi^{\sigma} = \mu\,\tau^{\rho}_{k\dot{\nu}}\,\xi^{\dot{\nu}},\\ \text{あるいは,}\\ \tau^{k\dot{\nu}}_{\ \ \rho}(P^{\rho}_{\sigma}\,\partial_k + P^{\rho}_{\tau}\,\Phi^{\tau}_{k\sigma})\,\chi^{\sigma} = \mu\,\xi^{\dot{\nu}},\end{array}\right\}\tag{5.10}$$

$$\left.\begin{array}{l}(q^{\dot{\nu}}_{\dot{\lambda}}\,\partial_k + q^{\dot{\nu}}_{\dot{\nu}}\,\Pi^{\dot{\nu}}_{k\dot{\lambda}})\,\xi^{\dot{\lambda}} = \mu\,\tau^{\dot{\nu}}_{k\nu}\,\chi^{\nu},\\ \text{あるいは,}\\ \tau^{k\nu}_{\ \ \dot{\sigma}}(q^{\dot{\sigma}}_{\dot{\rho}}\,\partial_k + q^{\dot{\sigma}}_{\dot{\kappa}}\,\Pi^{\dot{\kappa}}_{k\dot{\rho}})\,\xi^{\dot{\rho}} = \mu\,\chi^{\nu},\end{array}\right\}\tag{5.11}$$

但し，$\mu\,\tau^{\rho}_{k\dot{\nu}} \equiv -P^{\rho}_{\sigma}\,\Phi^{\sigma}_{k\dot{\nu}}$，$\mu\,\tau^{\dot{\nu}}_{k\nu} \equiv -q^{\dot{\nu}}_{\dot{\lambda}}\,\Omega^{\dot{\lambda}}_{k\nu}$ とおいた。これより，対応関係を逐一求めると次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l}\tau^{k\dot{\nu}}_{\ \ \rho}\,P^{\rho}_{\sigma} \equiv \sqrt{2}\,\sigma^{k\dot{\nu}}_{\ \ \sigma},\\ \tau^{k\dot{\nu}}_{\ \ \rho}\,P^{\rho}_{\tau}\,\Phi^{\tau}_{k\sigma} \equiv \sqrt{2}\,\sigma^{k\dot{\nu}}_{\ \ \sigma}(i\,\varepsilon\,\phi_k),\end{array}\right\}\tag{5.12}$$

及び

$$\left.\begin{array}{l}\tau^{k\nu}_{\ \ \dot{\sigma}}\,q^{\dot{\sigma}}_{\dot{\rho}} \equiv \sqrt{2}\,\sigma^{k\nu}_{\ \ \dot{\rho}},\\ \tau^{k\nu}_{\ \ \dot{\sigma}}\,q^{\dot{\sigma}}_{\dot{\kappa}}\,\Pi^{\dot{\kappa}}_{k\dot{\rho}} \equiv \sqrt{2}\,\sigma^{k\nu}_{\ \ \dot{\rho}}(i\,\varepsilon\,\phi_k).\end{array}\right\}\tag{5.13}$$

$(5.12)_2$，$(5.13)_2$ は，$(5.12)_1$，$(5.13)_1$ があるために，更に簡単になって，結局

$$\Phi^{\tau}_{k\sigma} \equiv \delta^{\tau}_{\sigma}\,(i\,\varepsilon\,\phi_k),\tag{5.14}$$

及び

$$\Pi^{\dot{\kappa}}_{k\dot{\rho}} \equiv \delta^{\dot{\kappa}}_{\dot{\rho}}\,(i\,\varepsilon\,\phi_k)\tag{5.15}$$

なる対応関係を得る。

かくして，基接続の各関係式が，Dirac eqs. を与えることができるようになり，我々の方法論は，spinor space の固有法則をも取扱うことができることとなった。新自由度とその法則は，すべからく，基接続概念により把握できることの実例である。

§ 6. Finslerian field theory について

まず最初に注意しておかねばならないことは，この種の場理論では，未だ非対称計量は考えられていず，相互作用の非対称性は，接続によって代表されるということである。

さて，前節のリーマン的スピノル場に対して，より非局所化を進めたものとして，フィンスラー的スピノル場が考えられてきている。[10] 元来は，非局所連続体力学そのものの範囲内で，この種の考え方は取扱われてきたものであるが，非局所化の要因が素粒子論の領域にまで拡げられてきている現在，系統的取扱いの方法として，Finslerian field theory が注目されてきている。もとより，我々としては，方向特性をもつ物質の連続体力学として，Finslerian continuum mechanics を展開してきているところであり，方向特性の物理的意味と固有法則を考える段階にまで至っている。

物理的フィンスラー場理論は，すべての量が element of support $(x, \dot{x})$ の函数であるという非局所化に基づいて，不変形式での Spinor 方程式を求めることが試みられているが，それは，我々からすれば，spinor 自由度の従うべき固有方程式を求めんとしていることになり，しかも，それらでは，未だ spinor の反映自体は Dirac matrices の方程式を介しているのみで，spinor 自身を場の構造量として把握することが考えられていない。従って，相互作用概念が欠けていて，計量の非対称化は図られていない。

通常の4次元時-空間の構造を支配する接続は，Finslerian field では

$$DX^{\kappa} = dX^{\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} X^{\lambda} dx^{\mu} + C_{\mu\lambda}{}^{\kappa} X^{\lambda} d\dot{x}^{\mu} \qquad (6.1)$$

で与えられる。$\dot{x}^{\kappa}$ の物理的意味は，単に，方向特性とみておく，この時，我々のいう固有法則は，$\dot{x}^{\kappa}$ の従うべきもので，今の場合，基接続を

$$\delta \dot{x}^{\kappa} = d\dot{x}^{\kappa} + \lambda^{\kappa}_{\lambda}\, dx^{\lambda} \tag{6.2}$$

と仮定すると，（6.1）は

$$DX^{\kappa} = X^{\kappa}{}_{|\lambda}\, dx^{\lambda} + X^{\kappa}{}_{||\lambda}\, \delta\dot{x}^{\lambda} \tag{6.3}$$

なる共変微分商形式で表わされる。但し，

$$\left.\begin{aligned} X^{\kappa}{}_{|\lambda} &= \partial_{\lambda} X^{\kappa} - \frac{\partial X^{\kappa}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \lambda^{\mu}_{\lambda} + \overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\lambda\mu} X^{\mu} \\ X^{\kappa}{}_{||\lambda} &= \frac{\partial X^{\kappa}}{\partial \dot{x}^{\lambda}} + C^{\kappa}_{\lambda\mu} X^{\mu} \ ; \quad \overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} - C^{\kappa}_{\nu\mu} \lambda^{\nu}_{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

（6.2）の λ は，2節で導入した相互作用係数そのものであり，又，この形式は，通常の Finsler 空間論では厳密に決定されるものであるが，ここでは省略する。

$\dot{x}^{\kappa}$ が固有自由度を表わす時，$\delta\dot{x}^{\kappa} = 0$ がその固有法則故，従来の我々の議論に帰着する。

Field theory としては，更に，$(x, \dot{x})$ の函数である spinor field が付随していると考え，4次元時-空間との間には，Dirac matrices γ^{μ} を介して

$$\gamma^{\mu} = h^{\mu}_{k} \gamma^{k} \ ; \quad 2\, g^{\kappa\mu} = \gamma^{\mu}\gamma^{\kappa} + \gamma^{\kappa}\gamma^{\mu} \tag{6.5}$$

なる関係が考えられる。但し，h^{μ}_{k} は ennuple，γ^{μ} は前節，$\sigma^{k\lambda\dot{\mu}}$，$\sigma^{k\lambda}{}_{\dot{\rho}}$ に相当し，（6.5）は（5.2），（5.3）と類同である。又，計量は，$(x, \dot{x})$ の函数となり，spinor 場自体も Finsler 的故，構造論的には，（6.1）〜（6.4）の形式が spinor ψ に対しても成立つと仮定できる。前節では，spinor space の指標と real world のそれとを区別したが，この場合は，両者とも同じ構造で，spinor が基本場中へ射影された形で扱われているので，指標の区別はしないことにする。厳密には，前節の如くに，区別すべきである。

さて，そうすると，spinor ψ に対しての接続は，同様にして，

$$\left.\begin{aligned} D\psi &= \psi_{|\lambda}\, dx^{\lambda} + \psi_{||\lambda}\, \delta\dot{x}^{\lambda} \\ &= d\psi - \Gamma_{\lambda}\, \psi dx^{\lambda} - C_{\lambda}\, \psi d\dot{x}^{\lambda} \\ \text{但し,} &\left(\begin{aligned} \psi_{|\lambda} &= \partial_{\lambda}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}^{\kappa}}\lambda^{\kappa}{}_{\lambda} - \overset{*}{\Gamma}_{\lambda}\psi \;;\; \overset{*}{\Gamma}_{\lambda} = \Gamma_{\lambda} - C_{\nu}\lambda^{\nu}{}_{\lambda} \\ \psi_{||\lambda} &= \frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}^{\lambda}} - C_{\lambda}\,\psi \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad (6.6)$$

で与えられる。つまり，通常の Finslerian field theory では，$\dot{x}^{\kappa}$ 自体に固有自由度たる spinor を代表させることをしないで，$(x, \dot{x})$ はあくまでも基底場の独立変数として扱ってい，この点が，我々の本来の固有法則に対する考え方と異なる点である。

(6.6) の C_{λ}, $\overset{*}{\Gamma}_{\lambda}$ なる接続係数は，それら自体が相互作用係数でなければならず，現に，(6.4) の $C_{\lambda\mu}^{\kappa}$, $\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\lambda}^{\kappa}$ と次の様に関係づけられている。[10), 11)]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\gamma^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial\gamma^{\mu}}{\partial\dot{x}^{\kappa}}\,\lambda^{\kappa}_{\lambda} + \gamma^{2}\,\overset{*}{\Gamma}{}^{\mu}_{\lambda\nu} - \overset{*}{\Gamma}_{\lambda}\,\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\,\overset{*}{\Gamma}_{\lambda} = 0 \\ &\frac{\partial\gamma^{\mu}}{\partial\dot{x}^{\lambda}} - \gamma^{\nu} C^{\mu}_{\lambda\nu} - C_{\lambda}\,\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu} C_{\lambda} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6.7)$$

但し，これらの条件は，$g_{\lambda\kappa|\mu} = 0$，$g_{\lambda\kappa||\mu} = 0$ などから求められるものである。

一方，spinor field 自体の方程式は，上記の共変微分形式を用いることにより，不変形式として，微分作用系をまとめることにより，

$$\left.\begin{aligned} &i\gamma^{\mu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}^{\nu}}\lambda^{\nu}_{\mu} - \overset{*}{\Gamma}_{\mu}\psi\right) - \kappa\,\psi = 0 \\ &i\beta^{\mu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}^{\mu}} - C_{\mu}\psi\right) - \omega\psi = 0 \quad (\beta^{\mu} \neq \gamma^{\mu}) \end{aligned}\right\} \quad (6.8)$$

で与えられる。[10)] 良く知られた Dirac eqs. である。

Spinor equations を支配する $\overset{*}{\Gamma}_{\mu}$, C_{λ} なる量は，(6.7) によって通常

の $\overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\mu\lambda}$, $C^{\kappa}_{\mu\lambda}$ と結びつけられ，γ^{μ} が (6.5) によって計量と結びつけられているから，spinor field の構造が，4次元 Finsler 時-空間と同等に扱えることになった。が，それは，構造論上の類似点をいっているのであって，spinor-field と4次元時-空間が同一場で論ぜられるというのではない。この点は，前節の如くに指標を区別し，かつ spinor も成分で表わしていくことにより，系統的に扱えるであろう。又，場の理論では，固有自由度を基接続で把握するよりは，別に spinor eqs. の形でとらえようとする。我々では，その spinor field こそが基接続で支配されると考えたい。それ故に，我々では相互作用概念が本質的であるが，通常の場の理論では，(6.6)，(6.7) を介して接続の中に相互作用項がとり入れられるにすぎない。

§7. 終りに

ここでのべてきたところは，spinor 自由度をはじめとする物理的自由度を，いかに基底場に反映させていくかについての種々の試みに対する吟味であった。

我々の立場は「連続体力学基礎論」故，主として論理的展開過程に注目してきたが，具体的な諸物性問題に対しても，我々なりに発言できるであろうが，それについては機会を改めたい。

この種の構造論的研究は，応用場の理論とか，応用空間論とかとして考察されてきており，我々は，それを物性問題に適用する意図をもって研究をおし進めている。そのためには，純粋な場の理論からの援助も必要だし，特定な物性問題についての知識も必要だし，とにかく幅広い洞察力を要すると思われるので，読者諸兄の討論を期待する。

§8. 参考文献

1) 池田　恵，　物性研究，　14 (1970)，203.

2) 池田　恵，　物性研究，　12 (1969)，365

3) M. Kawaguchi, RAAG Memoirs, 3 (1962), 718.

4) A. Einstein, The Meaning of Relativity. Princeton Univ. Press, 1955.

5) V. Hlavatý, Geometry of Einstein's Unified Field Theory. P. Noordhoff Ltd., 1961.

6) D. W. Sciama, Festschrift for Infeld. pp. 415－439. Pergamon Press, 1962.

7) E. Schrödinger, Space-Time Structure. Cambridge Univ. Press, 1960.

8) W. L. Bade and H. Jehle, Rev. Mod. Phys., 25 (1953), 714.

9) 池田 恵, 物性研究, 12 (1969), 305.

10) Y. Takano, Prog. Theor. Phys., 40 (1968), 1159.

11) J. L. Horváth und A. Moór, Zeits. f. Phys., 131 (1952), 544.

12) B. L. v. d. Waerden, Die gruppen theoretische Methode in der Quanten mechanik. Springer, 1932.